第 4 节 立体几何常见方法综合（★★☆）

强化训练

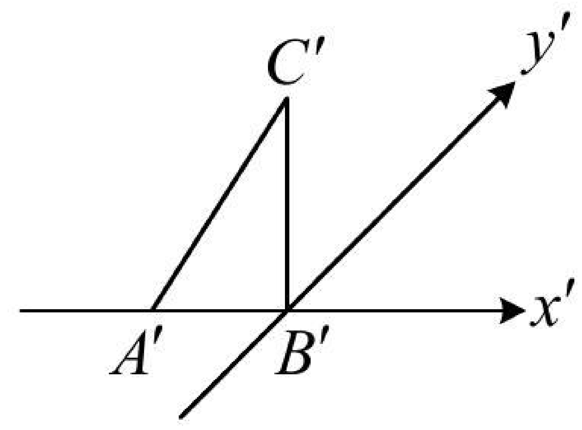
1.（★★）（多选）如图，$\Delta A'B'C'$ 表示水平放置的 ΔABC 根据斜二测画法得到的直观图，$A'B'$ 在 x' 轴上，$B'C'$ 与 x' 轴垂直，且 $B'C'=\sqrt{2}$，则下列说法正确的是（　　）

（A）ΔABC 的边 AB 上的高为 2

（B）ΔABC 的边 AB 上的高为 4

（C）$AC>BC$

（D）$AC<BC$



答案：BD

解析：要求 ΔABC 的边 AB 上的高，可先把直观图中与高对应的线段画出来，需注意原图中与 AB 垂直的线段在直观图中应与 $A'B'$ 成 45° 角，

如图 1，过 C' 作 y' 轴的平行线交 x' 轴于 D'，则原图中 $CD//y$ 轴，如图 2，所以 CD 即为 AB 边上的高，

在图 1 中，$\Delta B'C'D'$ 为等腰直角三角形，且 $B'C'=\sqrt{2}$，所以 $C'D'=2$，故在图 2 中，$CD=4$，

所以 ΔABC 的边 AB 上的高为 4，故 A 项错误，B 项正确；由图 2 可知 $AC<BC$，故 C 项错误，D 项正确.

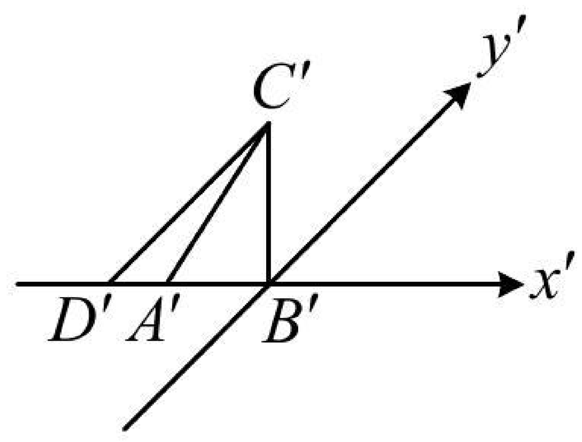


图1

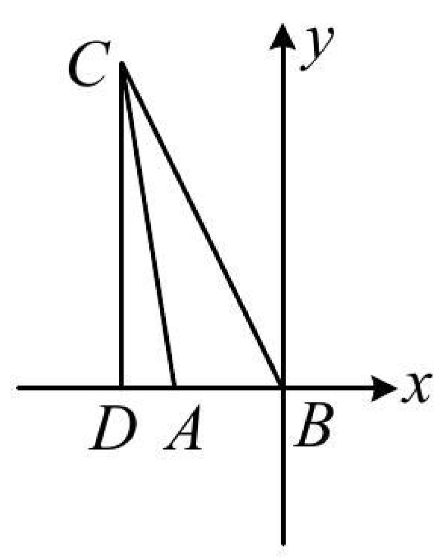
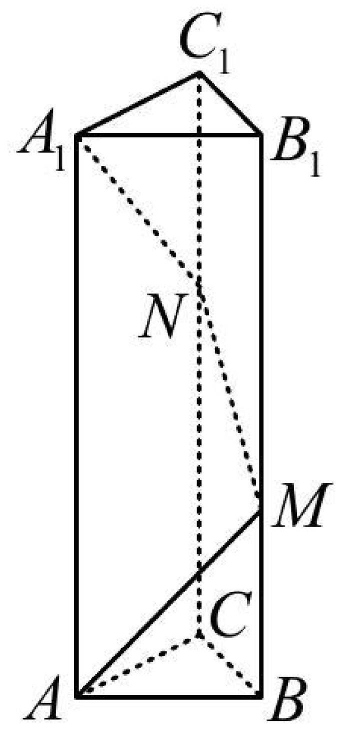


图2

2.（2022 • 定远模拟 • ★★）如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=4$，$AB=1$，一只蚂蚁从点 A 出发，沿每个侧面爬到 A_1，路线为 $A\to M\to N\to A_1$，则蚂蚁爬行的最短路程是（　　）

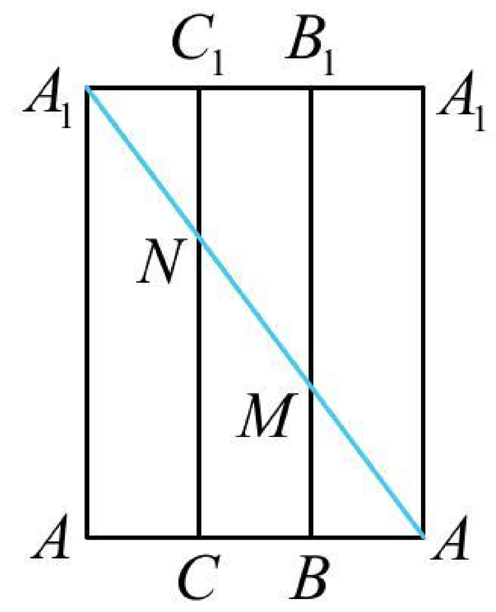
（A）4　（B）5　（C）6　（D）$2\sqrt{5}+1$



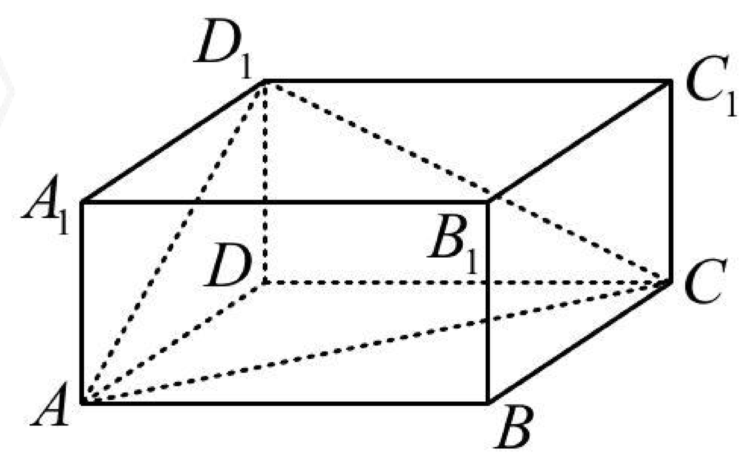
答案：B

解析：涉及最短路径问题，把空间图形展开到平面上来看，如图是正三棱柱沿 AA_1 的侧面展开图，

最短路径即为图中蓝色线段，其长度为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$.



3．（★★）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 2，高为 1，则点 D 到平面 ACD_1 的距离是_____.



答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解析：如图，直接算距离需作高，较麻烦，但观察发现 V_{D_1-ACD} 和 $S_{\Delta ACD_1}$ 好求，故用等体积法算距离，

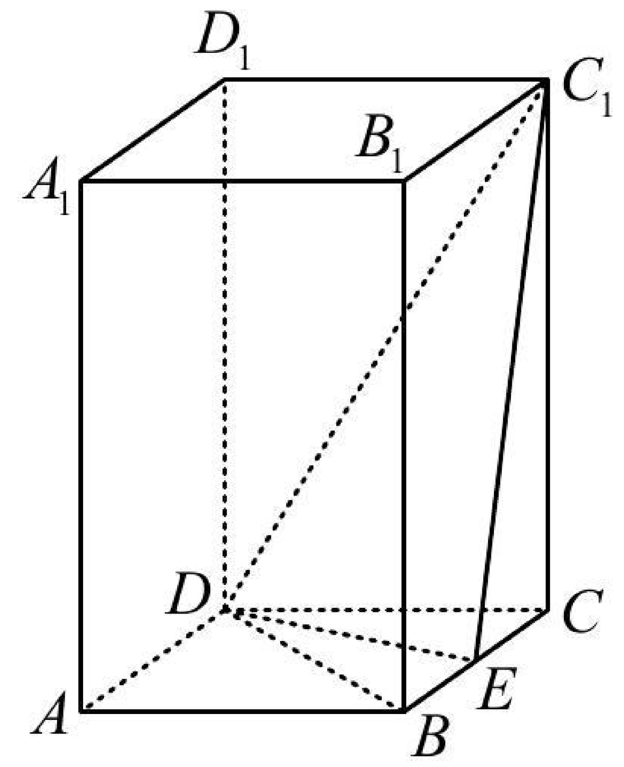
由题意，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，$AD_1=\sqrt{AD^2+DD_1^2}=\sqrt{5}$，$CD_1=\sqrt{CD^2+DD_1^2}=\sqrt{5}$，

所以等腰 ΔACD_1 的边 AC 上的高 $h=\sqrt{AD_1^2-(\frac{1}{2}AC)^2}=\sqrt{3}$，$S_{\Delta ACD_1}=\frac{1}{2}AC\cdot h=\sqrt{6}$，

设所求距离为 d，则 $V_{D-ACD_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD_1}\cdot d=\frac{\sqrt{6}}{3}d$，

又 $V_{D-ACD_1}=V_{D_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot DD_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{3}d=\frac{2}{3}$，解得：$d=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4．（★★★）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，E 是 BC 的中点，则点 C 到平面 C_1DE 的距离为_____.



答案： $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

解析： 直接求距离需作垂线，较麻烦，注意到 V_{C_1-CDE} 和 $S_{\Delta C_1DE}$ 好求，故用等体积法，

因为 $ABCD$ 为菱形，所以 $BC=CD$，又 $\angle BAD=60^{\circ}$，所以 $\angle BCD=60^{\circ}$，故 ΔBCD 为正三角形，

因为 $AB=2$，所以 $DE=\sqrt{3}$，又 $C_1C=AA_1=4$，所以 $C_1D=\sqrt{CD^2+CC_1^2}=2\sqrt{5}$，

因为 $CE=1$，所以 $C_1E=\sqrt{CE^2+CC_1^2}=\sqrt{17}$，所以 $DE^2+C_1E^2=20=C_1D^2$，故 $DE\perp EC_1$，

所以 $S_{\Delta C_1DE}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}=\dfrac{\sqrt{51}}{2}$，设点 C 到平面 C_1DE 的距离为 d，则 $V_{C-C_1DE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{51}}{2}d=\dfrac{\sqrt{51}}{6}d$，

另一方面，$V_{C-C_1DE}=V_{C_1-CDE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta CDE}\cdot CC_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times4=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{51}}{6}d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，解得：$d=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$，故点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

5.（★★★）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 DD_1，DB 的中点，则三棱锥 B_1-CEF 的体积为_____.

答案： 1

解析： 如图，以 B_1 为顶点求体积，则高不好找，故尝试转换顶点，观察发现 $CF\perp$ 面 B_1EF，故选 C 为顶点，

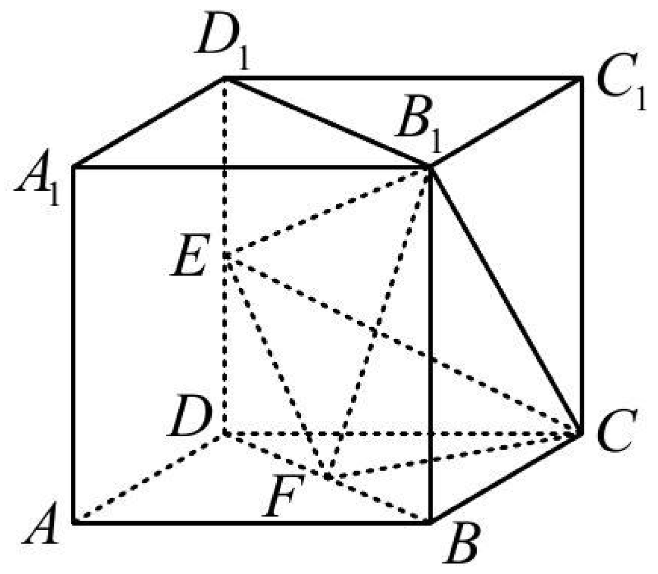
因为 $CB=CD$，F 为 DB 中点，所以 $CF\perp DB$，又 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $CF\perp BB_1$，故 $CF\perp$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $V_{B_1-CEF}=V_{C-B_1EF}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta B_1EF}\cdot CF$ ①，

又 $S_{\Delta B_1EF}=S_{BB_1D_1D}-S_{\Delta B_1D_1E}-S_{\Delta DEF}-S_{\Delta BB_1F}$

$=2\times2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$CF=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，代入①得 $V_{B_1-CEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$.



6．（★★★★）三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 1，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，E，F 分别为 BC 和 A_1C_1 的中点，若经过点 A，E，F 的平面将此三棱柱分割成两部分，则这两部分中体积较大者与体积较小者的体积之比为_____.

答案：$17:7$

解析：如图，F 和 AE 分别在上、下两个面内，且过 F 在面 $A_1B_1C_1$ 内易作 AE 的平行线，故作平行线扩大截面，

取 B_1C_1 中点 G，C_1G 中点 H，连接 A_1G，FH，EH，则 $FH /\!/ A_1G /\!/ AE$，所以截面即为 $AEHF$，

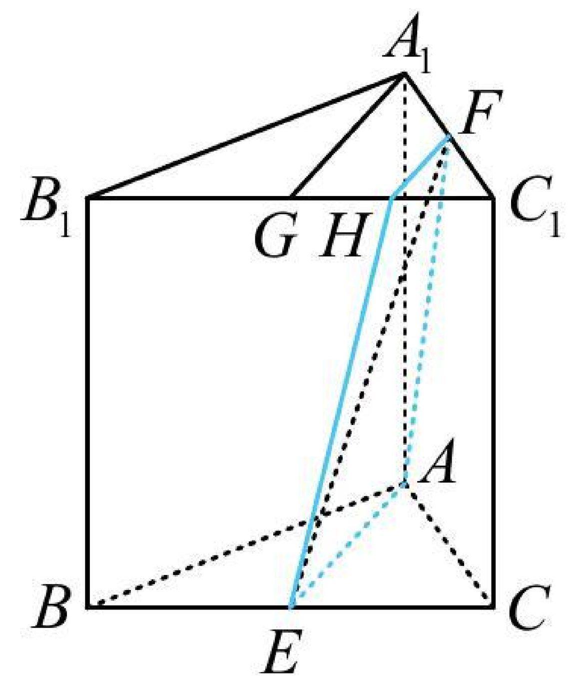
此截面右侧部分为三棱台，可先求它的体积，

由题意，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$S_{\Delta AEC}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$，$S_{\Delta C_1FH}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta A_1GC_1}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta AEC}=\dfrac{\sqrt{3}}{32}$，

所以截面右侧部分三棱台的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{32}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{8}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{32}})\times 1=\dfrac{7\sqrt{3}}{96}$，

又三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，所以截面左侧的体积为 $V_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{7\sqrt{3}}{96}=\dfrac{17\sqrt{3}}{96}$，

故所求体积之比为 $17:7$.



7．（2023 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★★）（多选）下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

（A）直径为 0.99m 的球体

（B）所有棱长均为 1.4m 的正四面体

（C）底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体

（D）底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

答案：ABD

解析：A 项，因为正方体的内切球直径为 1m，所以直径为 0.99m 的球体可以放入正方体容器，故 A 项正确；

B 项，我们想让正四面体尽可能大，联想正方体内特殊的正四面体，进而想到由面对角线可构成正四面体，

如图 1，蓝色正四面体的棱长为 $\sqrt{2}$，比 1.4 大，从而所有棱长均为 1.4m 的正四面体可以放入正方体容器，故 B 项正确；

C 项，注意到圆柱的底面直径很小，圆柱很细长，不妨将其近似成线段，故先看 1.8m 的线段能否放入正方体，

如图 1，正方体的棱长为 1，则正方体表面上任意两点之间距离的最大值为 $BD_1=\sqrt{3}<1.8$，

所以高为 1.8m 的圆柱不可能放入该正方体，故 C 项错误；

D 项，注意到圆柱的高很小，不妨将圆柱近似看成圆，故先分析直径为 1.2m 的圆能否放入正方体，为了研究这一问题，我们得先找正方体的尽可能大的截面，正方体有一个非常特殊的截面，我们不妨来看看，

如图 2，E，F，G，H，I，J 分别为所在棱的中点，则 $EFGHIJ$ 是边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的正六边形，

其内切圆如图 3，其中 K 为 HI 中点，则内切圆半径 $r=OK=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，直径 $2r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}>1.2$，

所以可以想象，底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体能放进正方体容器，故 D 项正确.

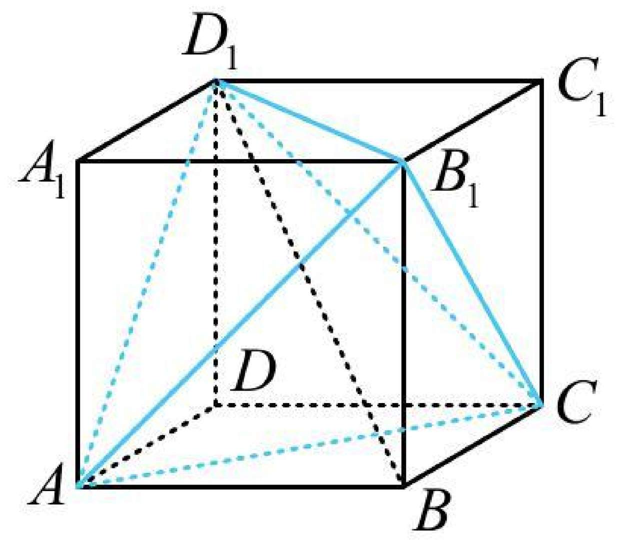


图1

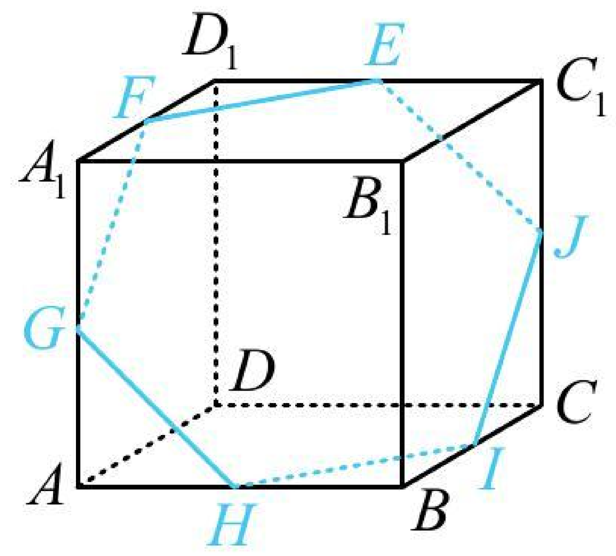


图2

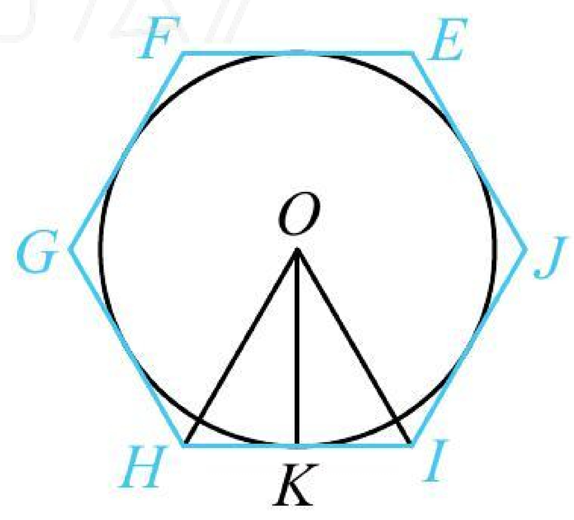


图3

【反思】本题不同于常规考法，无需准确计算，更多的是考大家的经验. 事实上，B 项提及的正四面体（图 1）就是正方体内最大的正四面体了. 因为该正四面体和正方体有相同的外接球，若正四面体再大一点，就会超出该外接球，必然也会超出正方体的范围. D 项提及的截面（图 2）也是正方体面积最大、内切圆半径最大的截面，但要严格论证这一结论，需要大量篇幅，此处略去.